

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

EXAMEN GUÍA DE CÁLCULO – ÁLGEBRA II
(LÍNEA DE MATEMÁTICAS)

Cálculo.

1. Usando la definición de ε - δ de límite, demuestre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{x}{y} = \frac{1}{3}.$$

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f es dos veces diferenciable en cero y calcule $f'(x)$ y $f''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Supongamos que un pato está nadando en círculo $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$ y que la temperatura del agua está dada por la fórmula $T = x^2 e^{-y} - xy^3$. Hallar dT/dt , la razón de cambio de temperatura que puede sentir el pato.

4. Hallar el volumen del sólido acotado por

$$x^2 + 2y^2 = 2, \quad z = 0, \quad \text{y} \quad x + y + 2z = 2.$$

5. Calcular $\iint_R \frac{1}{x+y} dy dx$, donde R es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, usando la transformación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

Álgebra lineal

1. Basándose sólo en la definición de determinante, calcular los coeficientes de x^3 y x^4 en la expresión:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

2. Calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Elegir λ de tal modo que el sistema siguiente tenga solución.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

4. Si A es invertible, pruebe que A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Una matriz cuadrada Q se llama ortogonal si $QQ^t = 1$. Pruebe que si Q es ortogonal entonces $\det(Q) = \pm 1$.