INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

EXAMEN GUÍA DE CÁLCULO – ÁLGEBRA III
(LÍNEA DE MATEMÁTICAS)

Cálculo

1. Encuentre la derivada con respecto a x de las siguientes funciones:

$$\text{a) } I(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \qquad\qquad \text{b) } F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{-t^2}\,dt$$

2. Considere la ecuación

$$F(x,y) = xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$$

y verifique, por medio del teorema de la función implícita, que define a y implícitamente como una función de x en una vecindad de $(x,y) = (0,1)$. Encuentre $y = y(x)$ como un polinomio cúbico de x en una vecindad de $(0,1)$. Sugerencia: En la parte última considere la serie de Taylor.

3. Calcular el área de la figura limitada por las curvas:

$$f(x) = e^x - 2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^{-x}$$

4. Use la definición de límite para mostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Si $\epsilon = 0.01$ encuentre δ.

5. Muestre que de todos los triángulos con área dada, el triángulo equilátero posee el perímetro mínimo.

6. Sea L un operador lineal sobre $\mathbf{R}^2$ y sean

$$\mathbf{v}_1 = (1,1), \qquad \mathbf{v}_2 = (-1,2), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,7)$$

si $L(\mathbf{v}_1) = (2,5)$ y $L(\mathbf{v}_2) = (-3,1)$ determine el valor de $L(\mathbf{v}_3)$.

7. Si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es no singular, muestre que $A^T A$ es no singular y que $\det(A^T A) > 0$.

8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores y vectores propios de A.
b) Factorice A como el producto PDP^{-1} donde D es una matriz diagonal y enconces use dicha factorización para encontrar A^7.

9. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre una base para el espacio nulo, $N(A)$, de A.
¿Cuál es la dimensión de $N(A)$?.

b) Encuentre una base para el espacio columna, $R(A)$, de A.
¿Cuál es el rango de A?.

10. Determine las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Justifique su respuesta.