Temario del examen de ingreso a la maestría de la ESFM del IPN, linea de matemáticas puras

Se supone tanto el dominio de recetas simples, por ejemplo, el cálculo de los valores y vectores propios de matrices pequeñas, como el dominio de la teoría: las definiciones y los teoremas principales, su aplicación y solución de problemas teóricos.

Álgebra lineal

1. Números complejos, forma polar, raíces de la unidad.
2. Polinomios de una variable, sus raíces, teorema fundamental del álgebra de polinomios.
3. Espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal, dimensión, cambio de base.
4. Operadores lineales, matriz asociada, cambio de la matriz asociada al cambiar las bases del dominio y del contradominio, núcleo y la imagen, relación entre sus dimensiones.
5. Operaciones algebraicas con matrices, solución de sistemas de ecuaciones lineales, matrices elementales y operaciones elementales, construcción de bases en el núcleo y la imagen (en el espacio columna), definiciones equivalentes y propiedades del rango.
6. Determinantes y sus propiedades principales. Aplicación de los determinantes al estudio de la invertibilidad de una matriz y a la solución de sistemas cuadradas determinados (fórmulas de Cramer).
7. Valores y vectores propios de operadores lineales y de matrices, varias descripciones equivalentes del espectro de una matriz, el teorema sobre el espectro de la matriz $f(A)$.
8. La forma canónica de Jordan, el cálculo de la matriz $f(A)$, donde f es un polinomio y A es una matriz cuadrada, el cálculo de la función exponencial de una matriz.
9. Espacios con producto interno, desigualdad de Schwarz, norma y distancia inducidas por un producto interno, proyección ortogonal sobre una recta, proyección ortogonal sobre un subespacio, proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, la matriz de Gram de un sistema de vectores, bases ortogonales y ortonormales.
10. Operadores normales y matrices normales, descomposición espectral de matrices normales, clases especiales de matrices normales: matrices autoadjuntas (hermitianas), matrices unitarias, proyecciones ortogonales, matrices positivas definidas.

Cálculo y elementos de análisis

1. Propiedades principales de números reales.
2. Cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos.
3. Valor absoluto y sus propiedades.
4. Definiciones y propiedades principales de las funciones exp, ln, cos, sen, tan, arc cos, arc sen, arctan.
5. Límites de sucesiones, límites de funciones (incluso límites en $-\infty$ y en $+\infty$, y límites infinitos).
6. Límites notables:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

7. Sucesiones de Cauchy.
8. Convergencia de series, convergencia absoluta, comparación de series y su convergencia.
9. Criterios de convergencia de series (Dirichlet, Cauchy, Dirichlet, Abel).
10. Continuidad de funciones, teorema del valor intermedio y otras propiedades de funciones continuas.
11. Derivadas, derivada de la composición, derivada de la función inversa, derivadas de órdenes superiores.
12. Teorema del valor medio (de Lagrange), análisis de la monotonía utilizando derivadas.
13. Regla de L'Hospital para calcular límites usando derivadas.
14. Continuidad uniforme, condición de Lipschitz.
15. Fórmula de Taylor, expansiones de Taylor–Maclaurin de las funciones exp, cos, sen, $(1+x)^p$, $\ln(1+x)$.
16. Cálculo de límites usando la fórmula de Taylor.
17. Integral de Riemann, teoremas fundamentales de cálculo.
18. Cálculo de áreas y de volúmenes.

19. Integral impropia de Riemann. Comparación de funciones y la convergencia de sus integrales impropias. Relación entre la convergencia de integrales impropias y la convergencia de series.
20. Teoremas de Abel y Dirichlet sobre la convergencia de integrales impropias.
21. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones, teorema de Weierstrass que da una condición suficiente de la convergencia uniforme de series de funciones.
22. Límite de una serie de funciones continuas que converge uniformemente.
23. Límite de integrales (al menos en el caso de convergencia uniforme).
24. Derivación bajo el signo de la integral.
25. Funciones de varias variables y con valores vectoriales, funciones diferenciables, la matriz de Jacobi (de las derivadas parciales).
26. Máximos y mínimos de funciones de varias variables.
27. Teorema de la función implicita.
28. Espacios métricos, conjuntos abiertos y cerrados en espacios métricos, sucesiones de Cauchy, espacios completos.
29. Definición general de la continuidad de funciones.
30. Teorema del punto fijo (de Banach) para funciones contractivas en espacios métricos completos.

Referencias

[1] S.H. Friedberg, A.J. Insel, and L.E. Spence, Álgebra lineal. Publicaciones Cultural, 1982 (o alguna edición más reciente).

[2] S. Axler, Linear algebra done right. Second Edition. Springer, 2004.

[3] K. Hoffman and R. Kunze, Linear algebra. Second edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[4] R. Bartle, D. Sherbert, Introducción al análisis matemático de una variable. Limusa Wiley, 2004.

[5] M. Spivak, Cálculo. Tercera edición. Reverté, Barcelona, 2012.

[6] T.A. Garrity, All the mathematics you missed: but need to know for graduate school. Cambridge University Press, 2002.

[7] P.N. de Souza and J.-N. Silva, Berkeley problems in mathematics. Springer, 2004.